Modello matematico della reazione a catena

Consideriamo una certa quantità di nuclei di U^{235} e indichiamo con N(t) il numero di quelli che hanno subito fissione all'istante t. Supponiamo che in un intervallo di tempo Δt il numero iniziale sia variato (ΔN) di una frazione k. Tale fattore è fondamentale per capire se la reazione è destinata a spegnersi (k<1) oppure è stabile (siamo in condizioni di *massa critica*, con k=1) o infine si ha una reazione a catena in cui il numero di fissioni aumentano esponenzialmente (k>1)

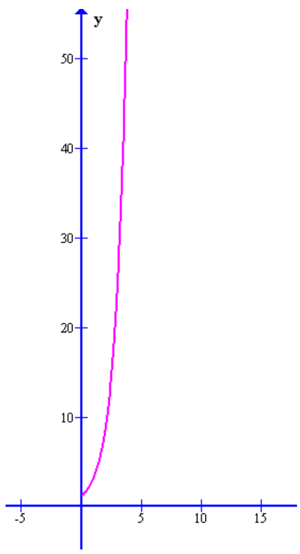
Ad esempio se ogni nucleo emette tre neutroni e di questi mediamente k=1,2 stimolano un nuovo decadimento, all'istante t+Δt si fissioneranno kN=1,2N nuovi nuclei

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = kN \; ;$$

così la rapidità con cui varia il numero di nuclei che hanno subito fissione è proporzionale al numero stesso. Infatti nel successivo intervallo di tempo, la stessa frazione k andrà riferita non al numero iniziale ma a quello già incrementato dalle primi ΔN fissioni.

Raffiniamo il modello passando dagli incrementi finiti alle derivate:

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t) \text{ , o anche } \frac{dN(t)}{N(t)} = kdt$$



Questa è una equazione differenziale, in quanto mette in relazione una funzione con le sue derivate. La risolviamo integrando entrambi i membri:

$$\int \frac{dN(t)}{N(t)} = k\int dt \quad \Rightarrow \quad \ln N(t) = kt + C \quad \Rightarrow \quad N(t) = e^{kt+C} = C' e^{kt}$$

ponendo t=0 si ottiene C'=N(0)=N_0, numero di fissioni all'istante iniziale, da cui

$$N(t) = N_0 e^{kt} \, .$$

Che rappresenta una crescita esponenziale nel tempo del numero dei nuclei che hanno subito fissione:appunto, una reazione esplosiva!